CHUYÊN ĐỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

I. BIỂU THỨC SỐ, BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

- **LÍ THUYẾT**

- Biểu thức không chứa chữ gọi là biểu thức số. VD: 2-3:4-52,…
- Biểu thức chỉ chứa số hoặc chỉ chứa chữ hoặc chứa cả số và chữ gọi chung là biểu thức đại số. VD: a+4-5b,…
- Trong một biểu thức đại số, các chữ (nếu có) dùng để thay thế hay đại diện cho những số nào đó được gọi là các biến số (gọi tắt là các biến).
- Muốn tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay giá trị đã cho của mỗi biến vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

- **BÀI TẬP**

Bài 1. Hãy viết biểu thức đại số biểu thị:

a) Tổng của a và b;

b) Hai lần tổng a và b;

c) Nửa tổng a và b;

d) Nửa hiệu a và b;

e) Tích của nửa tổng a và b với hiệu a và b.

Lời giải:

a) $a+b$;

b) $2(a+b)$;

Bài 2. Viết biểu thức đại số biểu thị:

Diện tích hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp là 5(cm) và a(cm)

Bài 3. Bạn An mua 5 quyển vở giá x đồng một quyển và 4 cái bút giá y đồng một cái. Hỏi số tiền

An phải trả là bao nhiêu?

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức $A=2x2-3x+1$ tại:

a) x=-3, b) x=0,5 c) $x=\frac{1}{3}$

Giải

a) Thay x=-3 vào biểu thức A:

A= 2.(-3)2-3.(-3)+1=28

Vậy khi x =-3 giá trị của biểu thức A bằng 28

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức $2x^2y-5y^2$ tại $x=-2$ và $y=3$

II. ĐA THỨC MỘT BIẾN

TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

+ Đơn thức một biến là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và biến đó. VD 2; 3x; 5+6x

+ Đa thức một biến (gọi tắt là đa thức) là tổng của những đơn thức của cùng một biến; mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó. VD 2+3x

+ Số 0 cũng được gọi là một đa thức, gọi là đa thức không.

+ Kí hiệu: Ta thường kí hiệu đa thức bằng một chữ cái in hoa. Đôi khi còn viết thêm kí hiệu biến trong ngoặc đơn. VD. A(x)= 2+3x

Đa thức A theo biến x.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Thu gọn và sắp xếp đa thức một biến.

I. Phương pháp giải:

+ Thu gọn đa thức một biến: Thực hiện phép tính cộng các đơn thức cùng bậc.

+ Sắp xếp đa thức một biến (đa thức khác 0): Viết đa thức dưới dạng thu gọn và sắp xếp các hạng tử của nó theo lũy thừa giảm của biến.

Bài 1. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến $P(x) = -x^3 + x + x^3 - 2x + 1$.

Lời giải:

$P(x) = -x^3 + x + x^3 - 2x + 1$

$P(x) = (-x^3 + x^3) + (x - 2x) + 1$

$P(x) = -x + 1$

Sắp xếp các hạng tử theo lũy thừa giảm dần: $P(x) = -x + 1$.

Bài 2. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến $Q(x) = -x^2 + 2 - 3x^2 + 5x$

Bài 3. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:
$M(x) = -x^2 - 3 + 7x^2 - 2x$.

Bài 4. Sắp xếp các hạng tử của đa thức sau theo lũy thừa tăng dần của biến.
$M(x) = -x^5 + 3x^2 - 3 + 7x^2 + x^5 - 2x$.

Bài 5. Hãy thu gọn và sắp xếp các hạng tử đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến:
$C(x) = 5 + 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 2x^4 + 7x^2 - 9$.

Dạng 2: Tìm bậc và các hệ số của một đa thức.

I. Phương pháp giải:

Trong một đa thức thu gọn và khác đa thức không:

- Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, được viết dưới dạng thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.
- Hệ số của hạng tử có bậc cao nhất gọi là hệ số cao nhất của đa thức đó.
- Hệ số của hạng tử có bậc 0 gọi là hệ số tự do của đa thức đó (hệ số không có biến).

*Chú ý:

- Đa thức không thì không có bậc.
- Trong một đa thức thu gọn, hệ số cao nhất phải khác 0 (các hệ số khác có thể bằng 0).
- Muốn tìm bậc của một đa thức chưa thu gọn, ta phải thu gọn đa thức đó.

$B(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 4x^2 + 4$.

Bài 1. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau

Lời giải:

Đa thức $B(x)$ có bậc 4.

Hệ số cao nhất là 2, hệ số lũy thừa bậc 3 là
1 là 1hệ số tự do là 4.

Bài 2. Xác định bậc và tìm hệ số của đa thức một biến sau $E(y) = 5y^5 - 2y^3 + 3y^4 - 5y^5$.

Lời giải:

Ta có: $E(y) = 5y^5 - 2y^3 + 3y^4 - 5y^5 = (5y^5 - 5y^5) + 3y^4 - 2y^3 = 3y^4 - 2y^3$.

Đa thức $E(y)$ có bậc 4.

Hệ số cao nhất là 3, hệ số lũy thừa bậc 3 là -2.

Bài 3. Cho đa thức: $P(x) = 7x^3 + 3x^4 - x^2 + 5x^2 - 6x^3 - 2x^4 + 2017 - x^3$.

a) Chỉ ra bậc của P(x)

b) Viết các hệ số của P(x). Nêu rõ hệ số cao nhất và hệ số tự do.

Bài 4: Cho đa thức: $P(x) = 2 + 7x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - x^3 + 6x^5$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo luỹ thừa giảm.

b) Viết các hệ số khác 0 của đa thức $P(x)$.

c) Xác định bậc của đa thức, hệ số cao nhất, hệ số tự do.

Bài 5: Thu gọn rồi tìm bậc của các đa thức sau:

a) $A = 3x^2 + 7x^3 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2$; *b)* $B = 3x^2 + x - 3x^2 - 5$

Bài 6. Một hãng taxi quy định giá cước như sau: $1km$ đầu tiên giá 11 nghìn đồng. Từ kilômét thứ hai trở đi giá 10 nghìn đồng/km.

a) Người thuê xe taxi của hãng đó đi x km $(x > 1)$. Hãy viết đa thức tính số tiền mà người đó phải trả?

b) Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức đó?

Dạng 3: Tính giá trị của đa thức

I. Phương pháp giải:

+ Để tính giá trị của đa thức ta thực hiện theo các bước

Bước 1: Thu gọn, sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.

Bước 2: Thay giá trị cụ thể của biến vào đa thức và thực hiện các phép tính.

Bước 3: Kết luận.

II. Bài toán.

Bài 1: Tính giá trị của đa thức $A(y) = 7y^2 - 3y + \frac{1}{2}$ tại $y = -2$.

Lời giải

$A(-2) = 7.(-2)^2 - 3.(-2) + \frac{1}{2} = 28 + 6 + \frac{1}{2} = \frac{69}{2}$

Vậy tại $y = -2$ đa thức $A(y)$ có giá trị bằng $\frac{69}{2}$.

Bài 2: Tính giá trị của đa thức $B(x) = -4x^5 - 3x - \frac{1}{2} + 7x^3 + 4x^5 + \frac{1}{2}$ tại $x = 5$;

Lời giải

$B(x) = -4x^5 - 3x - \frac{1}{2} + 7x^3 + 4x^5 + \frac{1}{2} = 7x^3 - 3x$.

$B(5) = 7.5^3 - 3.5 = 875 - 15 = 860$.

Vậy tại $x = 5$ đa thức $B(x)$ có giá trị bằng 860.

Bài 3. Cho đa thức: $P(x) = 2x^3 + x^2 + 5 - 3x + 3x^2 - 2x^3 - 4x^2 + 1$. Tính giá trị của $P(x)$ tại $x = 0$; $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho đa thức: $B(x)=(2a+1)x^3-2x^4+6x+3$. Tính $B\left(\frac{1}{2}\right)$.

Bài 5: Lan có 150 nghìn đồng tiết kiệm. Lan mua một bộ dụng cụ học tập hết 45 nghìn đồng và 10 quyển vở giá x nghìn đồng.

a) Hãy tìm đa thức (biến x) biểu thị số tiền còn lại (đơn vị: nghìn đồng). Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức đó.

b) Sau khi mua vở thì Lan còn dư 5 nghìn đồng. Hỏi giá tiền của mỗi quyển vở?

Dạng 4: Nghiệm của đa thức một biến.

I. Phương pháp giải:

- Nếu tại $x=a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x=a$) là một nghiệm của đa thức đó.
- x=a là nghiệm của đa thức P(x) khi P(a)=0

II. Bài toán.

Bài 1: Kiểm tra xem 1 có phải là nghiệm của các đa thức sau không?

a) $M(x)=2022x^2-2022$;

b) $N(y)=y^2-7y+6$;

c) $P(u)=2u+1$.

Lời giải:

a) Thay $x=1$ vào đa thức $M(x)$, ta có: $M(1)=2022.1^2-2022=0$.

Suy ra $x=1$ là nghiệm của đa thức $M(x)$.

b) Thay $y=1$ vào đa thức $N(y)$, ta có: $N(1)=1^2-7.1+6=0$.

Suy ra $y=1$ là nghiệm của đa thức $N(y)$.

c) Thay $u=1$ vào đa thức $P(u)$, ta có: $P(1)=2.1+1=3\neq 0$.

Suy ra $u=1$ không là nghiệm của đa thức $P(u)$.

Bài 2: Cho đa thức: $P(x)=x^3+2x^2-3x$. Số nào sau đây là nghiệm của đa thức $P(x)$: $0;1;-1;-3$.

Lời giải:

+ Ta có: $P(0)=0^3+2.0^2-3.0=0 \Rightarrow x=0$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

+ Tương tự: $P(1)=1^2+2.1^2-3.1=0 \Rightarrow x=1$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

+ $P(-1)=(-1)^3+2.(-1)^2-3.(-1)=4\neq 0 \Rightarrow x=-1$ không phải là nghiệm của đa thức $P(x)$.

+ $P(-3)=(-3)^3+2.(-3)^2-3.(-3)=0 \Rightarrow x=-3$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

Vậy các số: $0;1;-3$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Bài 3 : Tìm nghiệm của đa thức sau:

a) $A(x)=2+x$;

b) $B(y)=2y^2+1$;

c) $C(x)=x^2+2x$;

d) $D(y)=x^2-2x+1$.

Lời giải:

a) Ta có: $A(x)=2+x=0\Rightarrow x=-2$.

Vậy $x=-2$ là nghiệm của đa thức $A(x)$.

b) Ta có: $B(y)=2y^2+1=0\Rightarrow 2y^2=-1$ (vô lí vì $2y^2\geq 0$; $-1<0$ với mọi số thực y).

Vậy đa thức $B(y)$ không có nghiệm.

c) Ta có: $C(x)=x^2+2x=0\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x=0$ hoặc $x=-2$.

Vậy đa thức $C(y)$ có nghiệm $x=0$; $x=2$.

d) Ta có: $D(y)=x^2-2x+1=0.\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$

Vậy đa thức $D(y)$ có nghiệm $x=1$.

Bài 4: Cho đa thức: $f(x)=(2x^2-3x+1)-(x^2-7x-2)$

a) Thu gọn đa thức $f(x)$.

b) Chứng minh rằng -1 và -3 là các nghiệm của $f(x)$.

Bài 5: Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $(2x-4)(x+9)$;

b) $(x+1)(x-1)(3-2x)$

PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

Để cộng hoặc trừ hai đa thức một biến ta có thể thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1: Nhóm các đơn thức cùng lũy thừa của biến rồi thực hiện phép cộng

Cách 2: Sắp xếp các đơn thức của hai đa thức cùng theo thứ tự lũy thừa tăng hoặc giảm dần của biến và đặt tính dọc sao cho lũy thừa giống nhau ở hai đa thức thẳng cột với nhau rồi thực hiện cộng theo cột.

Bài 1. Cho hai đa thức $P(x)=x^4+2x^3+x-2$; $Q(x)=-2x^4-x^3+x^2+1$. Tính tổng của hai đa thức theo 2 cách.

Lời giải:

Cách 1:

$P(x)+Q(x)=(x^4+2x^3+x-2)+(-2x^4-x^3+x^2+1)$

$=x^4+2x^3+x-2-2x^4-x^3+x^2+1$

$=(x^4-2x^4)+(2x^3-x^3)+x^2+x+(-2+1)$

$=-x^4+x^3+x^2+x-1$

Cách 2:

$$\begin{array}{rl} P(x) & = x^4+2x^3 \quad +x-2 \\ + & \\ \hline Q(x) & =-2x^4-x^3+x^2 \quad +1 \\ \hline P(x)+Q(x) & =-x^4+x^3+x^2+x-1 \end{array}$$

Bài 2. Cho hai đa thức:

$P(x)=2x^3-3x^2+x$; $Q(x)=x^3-x^2+2x+1$

Tính $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$.

Lời giải:

$$P(x)+Q(x)=(2x^3-3x^2+x)+(x^3-x^2+2x+1)$$
$$=2x^3-3x^2+x+x^3-x^2+2x+1$$
$$=3x^3-4x^2+3x+1$$
$$P(x)-Q(x)=(2x^3-3x^2+x)-(x^3-x^2+2x+1)$$
$$=2x^3-3x^2+x-x^3+x^2-2x-1$$
$$=x^3-2x^2-x-1.$$

Bài 3. Cho hai đa thức:

$P(x)=x^3-2x^2+x-5$

$Q(x)=-x^3+2x^2+3x-9$

Tính $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$

Lời giải:

$$P(x)+Q(x)=(x^3-2x^2+x-5)+(-x^3+2x^2+3x-9)$$
$$=x^3-2x^2+x-5-x^3+2x^2+3x-9$$
$$=4x-14$$
$$P(x)-Q(x)=(x^3-2x^2+x-5)-(-x^3+2x^2+3x-9)$$
$$=x^3-2x^2+x-5+x^3-2x^2-3x+9$$
$$=2x^3-4x^2-2x+4$$

Bài 4. Cho hai đa thức $F(x)=3x^2+2x-5$ và $G(x)=-3x^2-2x+2$. Tính $H(x)=F(x)+G(x)$ và tìm bậc của $H(x)$.

Bài 5. Cho hai đa thức $F(x)=x^5-3x^4+x^2-5$ và $G(x)=2x^4+7x^3-x^2+6$. Tính $F(x)-G(x)$ rồi sắp xếp kết quả theo lũy thừa tăng dần của biến.

Bài 6. Cho hai đa thức:

$P(x)=2x^4+3x^3+3x^2-x^4-4x+2-2x^2+6x$

$Q(x)=x^4+3x^2+5x-1-x^2-3x+2+x^3$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tính $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$.

Bài 7. Cho hai đa thức:

$P(x)=5x^3+3-3x^2+x^4-2x-2+2x^2+x$

$Q(x)=2x^4+x^2+2x+2-3x^2-5x+2x^3-x^4$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tính $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$

Dạng 2: Tìm biểu thức, tính giá trị biểu thức

I. Phương pháp giải:

Hoàn toàn tương tự bài toán tìm đa thức đã học, ta cũng áp dụng quy tắc chuyển vế và quy tắccộng trừ đa thức một biến để tìm đa thức M chưa biết.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho đa thức $P(x)=2x^4-x^2+x-2$. Tìm $Q(x);H(x)$ sao cho:

a) $Q(x)+P(x)=3x^4+x^3+2x^2+x+1$. b) $P(x)-H(x)=x^4-x^3+x^2-2$.

Lời giải:

a) Ta có: $Q(x)+P(x)=3x^4+x^3+2x^2+x+1$, thay $P(x)=2x^4-x^2+x-2$, ta được:

$$Q(x)+(2x^4-x^2+x-2)=3x^4+x^3+2x^2+x+1$$
$$Q(x)=(3x^4+x^3+2x^2+x+1)-(2x^4-x^2+x-2)$$
$$Q(x)=3x^4+x^3+2x^2+x+1-2x^4+x^2-x+2$$
$$Q(x)=(3x^4-2x^4)+x^3+(2x^2+x^2)+(x-x)+(1+2)$$
$$Q(x)=x^4+x^3+3x^2+3.$$

Vậy $Q(x)=x^4+x^3+3x^2+3$.

b) Ta có $P(x)-H(x)=x^4-x^3+x^2-2$, thay $P(x)=2x^4-x^2+x-2$, ta được:

$$(2x^4-x^2+x-2)-H(x)=x^4-x^3+x^2-2$$
$$H(x)=(2x^4-x^2+x-2)-(x^4-x^3+x^2-2)$$
$$H(x)=2x^4-x^2+x-2-x^4+x^3-x^2+2$$
$$H(x)=(2x^4-x^4)+x^3-(x^2+x^2)+x+(2-2)$$
$$H(x)=x^4+x^3-2x^2+x.$$

Vậy $H(x)=x^4+x^3-2x^2+x$.

Bài 2. Cho 2 đa thức $F(x)=4x+3x^2-3x^4+2$ và $G(x)=-10x^5+14+4x-3x^4+10x^5$

Tìm đa thức $H(x)$, biết $H(x)+G(x)=F(x)$.

Bài 3. Cho hai đa thức: $P(x)=2x^3+7x^2-x-2021$ và $Q(x)=-7x^2-2x^3+14x-2022$.

Tìm đa thức $N(x)$ biết $P(x)-N(x)=Q(x)$.

PHÉP NHÂN, CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1. Nhân đa thức với đa thức.

Muốn nhân đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi đơn thức của đa thức này với từng đơn thức của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

2. Phép chia đa thức một biến:

Cho hai đa thức P và Q (Q khác 0). Ta nói đa thức P chia hết cho đa thức Q nếu có đa thức M sao cho P=Q.M

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Bài 1. Thực hiện phép tính nhân $x^2(3x^3-2x-1)$ ta được kết quả

Lời giải

$$x^2(3x^3-2x-1)=x^2.3x^3-x^2.2x-x^2.1=3x^5-2x^3-x^2$$

Bài 2: Tính $(3x^2+3).\left(-\frac{1}{3}x\right)$

Lời giải

$$\left(3x^2+3\right).\left(-\frac{1}{3}x\right)=3x^2.\left(-\frac{1}{3}x\right)+3.\left(-\frac{1}{3}x\right)=-x^3-x$$

Bài 3: Tích của đa thức $x+2$ và đa thức $x+5$ là đa thức

Lời giải

$$\left(x+2\right)\left(x+5\right)=x^2+2x+5x+10=x^2+7x+10$$

Bài 4: Thực hiện phép tính $\left(2x^3-3x^4+12x^2\right):x$

Lời giải

$$\left(2x^3-3x^4+12x^2\right):x=2x^2-3x^3+12x$$

Bài 5: Thực hiện phép tính $\left(x^3+x^2-5x+3\right):\left(x+3\right)$

Lời giải

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & -5x & +3 & x\quad +3 \\ \hline -\ x^3 & +3x^2 & & & x^2-2x+1 \\ \hline & -2x^2 & -5x & +3 & \\ -\ & -2x^2 & -6x & & \\ \hline & & x & +3 & \\ -\ & & x & +3 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Bài 6: Thực hiện phép nhân.

1) $\left(x+3\right)\left(x-1\right);$ 2) $\left(4x+3\right)\left(x-2\right);$

3) $\left(2x+3\right)\left(x+1\right);$ 4) $\left(5x-2\right)\left(x^2-3x+1\right);$

Bài 7: Thực hiện phép tính chia:

1) $\left(3x^5-9x^6+12x^9\right):\left(3x\right);$ 2) $\left(6x^4+4x^3+8x^2\right):\left(2x\right)$

3) $\left(8x^6+16x^5-10x^4\right):\left(2x^4\right);$ 4) $\left(4x^4+6x^5+14x^7\right):\left(2x^3\right);$

Bài 8: Tính (Rút gọn nếu có thể):

1) $x\left(2x^2+3\right)-x^2\left(5x-1\right)+x^2$ 2) $3x\left(x+2\right)-5x\left(1+x\right)-8\left(x^2-3\right)$

3) $4x\left(x^2-x+1\right)-x\left(3x^2+2x+5\right)$ 4) $x^2\left(x^2-4x+3\right)+x\left(x^2-x-3\right)$

Bài 9: Tìm x, biết:

1) $-5\left(x^2-3x+1\right)+x\left(1+5x\right)=x-2$ 2) $12x^2-4x\left(3x+5\right)=10x-17$

3) $-4x\left(x-5\right)+7x\left(x-4\right)-3x^2=12$ 4) $4x^2-2x+3-4x\left(x+5\right)=7x-3$

Bài 10: Tính (rút gọn):

1) $\left(x+5\right)\left(x-7\right)-7x\left(x-3\right)$ 2) $x\left(x^2-x-2\right)-\left(x-5\right)\left(x+1\right)$

3) $(x-5)(x-7)-(x+4)(x-3)$ 4) $(x-1)(x-2)-(x+5)(x+2)$

Bài 11: Tìm x, biết:

1) $(x-5)(x-4)-(x+1)(x-2)=7$ 2) $5x(x-3)=(x-2)(5x-1)-5$

3) $6(x-3)(x-4)-6x(x-2)=4$ 4) $(x-5)(x-1)=(x-1)(x-2)$

Bài 12: Tìm số dư trong phép chia:

1) $(x^3-x^2-5x+21):(x^2-4x+7)$ 2) $(x^3+3x^2+3x+1):(x^2+2x+1)$

3) $(x^2-4x+3):(x-3)$; 4) $(x^2+5x-6):(x-1)$;

Bài 13: Cho hai đa thức $A=x^4-2x^3+x^2+13x-11$ và $B=x^2-2x+3$. Tìm thương Q và dư R sao cho $A=B.Q+R$.